Grado en Matemáticas – Examen de Análisis Funcional

1. (2 puntos) Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define $T_a : \ell_1 \to \ell_1$ por $(T_a x)(n) = a(n)x(n)$ para todo $x \in \ell_1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que:
   a) $T_a \in L(\ell_1)$ y $\|T_a\| = \|a\|_\infty$. Deduce que $L(\ell_1)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞.
   b) Prueba que si T_a es inyectivo entonces su imagen es densa en ℓ_1.
   c) Prueba que T_a es un isomorfismo si, y sólo si, $\operatorname{ínf}\{|a(n)| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

2. (1 punto) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Dado $f \in \mathcal{H}^*$ prueba que $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(u_n)} u_n$ es el único elemento $y \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = (x \mid y)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

3. (1 punto) Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u \in X \setminus M$. Prueba que $f : M + \mathbb{K}\, u \to \mathbb{K}$ dada por $f(m + \lambda u) = \lambda$ es una forma lineal bien definida y es continua si, y sólo si, $u \notin \overline{M}$, en cuyo caso, $\|f\| = 1/\operatorname{dist}(u, M)$.

4. (1 punto) Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X y $T \in L(M, \ell_\infty)$. Prueba que existe $S \in L(X, \ell_\infty)$ que extiende a T y $\|S\| = \|T\|$.

5. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo (0,5 puntos cada una).

   a) Sean $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\,.\,\|) \to (X, |||\,.\,|||)$ no es continua.

   b) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un funcional lineal continuo de X en ℓ_∞.

   c) Sean $\|\,.\,\|_1$ y $\|\,.\,\|_2$ dos normas completas en un espacio vectorial X que tienen los mismos funcionales lineales continuos. Entonces dichas normas son equivalentes.

   d) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $T_n : c_0 \to c_0$ definido por $T_n(x) = x(n)e_n$. Entonces $T_n \in L(c_0, c_0)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a cero pero no converge a cero en $L(c_0, c_0)$.

6. (3 puntos) Desarrolla uno de los temas siguientes:

   - Formas geométricas del teorema de Hahn-Banach. Separación de conjuntos convexos.
   - Teorema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus.
   - Las topologías débil y débil*. Teorema de Mazur. Adherencias débil y débil* de la bola unidad.

Pondré las calificaciones en el SWAD. Revisión de exámenes: día 15 de febrero de 10h a 13h en mi despacho (nº17, Dpto. Análisis Matemático).

Granada, 9 de febrero de 2018